Ficha de Exercícios Nº 04
CÁLCULO VECTORIAL E ESPAÇOS VECTORIAIS

Curso: Engenharias **Nível**: I
Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica **Semestre**: 1º/2024
Docentes: Grupo de disciplina **Carga Horária**: 6h/Semanal
Duração: Duas semanas (15-Abr a 27-Abr-24)

I. Adição de Vectores e Multiplicação por Escalar

1. Determinar a extremidade do segmento que representa o vector $\vec{v} = (2, -5)$, sabendo que sua origem é o ponto $A(-1, 3)$.

2. Calcule $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{2a} + \overrightarrow{3b}$, $-5\vec{a} + 4\vec{b}$ e $\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ se $\vec{a} = (3; -1)$ e $\vec{b} = (4; 6)$.

3. Sejam $\vec{a} = (1; 2; 2)$, $\vec{b} = (1; 0; -3)$ e $\vec{c} = (-2; 4; -3)$. Ache:

   a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ c) $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

4. Dados os vectores $\vec{u} = (3; -2)$ e $\vec{v} = (1; -2)$, determinar o vector $\vec{w}$ tal que:

   a) $2(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$ b) $3\vec{w} - \frac{1}{3}(2\vec{v} - \vec{u}) = 3(4\vec{w} - 2\vec{u})$

5. Dados os vectores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar k_1 e k_2 tal que

$$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}.$$

6. Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(1, 0)$, $C(2, -1)$, determinar D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

7. Dados os pontos $A(2, -3, 1)$ e $B(4, 5, -2)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

8. Dados os pontos $A(-1, 2, 3)$ e $B(4, -2, 0)$, determinar o ponto P tal que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

9. Determinar o vector $\vec{v}$ sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

10. Encontrar os números a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 1), \vec{v}_2 = (2, 0, -4) \text{ e } \vec{w} = (-4, -4, 14).$$

11. Verificar se são colineares os pontos:

    a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$.

    b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$.

12. Calcular *a* e *b* de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$.

II. Produtos de Vectores (Escalar, Vectorial e Misto)

13. Designando a e b os comprimentos dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente, calcule $\vec{a}\cdot\vec{b}$ sabendo que:

a) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 4, (\vec{a},\vec{b}) = 45^{\circ}$;

b) $||\vec{a}| = 1{,}5; |\vec{b}| = 4, (\vec{a},\vec{b}) = 60^{\circ}$;

c) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \vec{a}$ e $\vec{b}$ têm sentidos opostos;

d) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \vec{a}$ e $\vec{b}$ têm mesmo sentido.

14. Calcule $(\vec{a},\vec{a})$, $(\vec{a},\vec{b})$, $(\vec{a},\overrightarrow{9b})$ e $(\vec{a},-\overrightarrow{9b})$ se:

a) $\vec{a} = (2;-1)$ e $\vec{b} = (3;4)$

b) $\vec{a} = (2;2;0)$ e $\vec{b} = (-1;1;0)$

15. Calcule o produto escalar dos vectores $3\vec{a} - 2\vec{b}$ e $\vec{a} + 2\vec{b}$, se os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um ângulo de $\alpha = 2\pi/3$ e $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

16. Designando a e b os comprimentos dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente, determine o ângulo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sabendo que:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = -a\cdot b$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}a\cdot b$

17. Sendo $|\vec{u}| = 1, |\vec{v}| = 5$ e $(\vec{u},\vec{v}) = 120°$, calcule $|\vec{u}+\vec{v}|$ e $|\vec{u}-4\vec{v}|$.

18. Dados os vectores $\vec{u} = (1, a, -2a-1), \vec{v} = (a, a-1, 1)$ e $\vec{w} = (a, -1, 1)$, determinar *a* de modo que $\vec{u}\,.\,\vec{v} = (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}$.

19. Seja o vector $\vec{v} = (m+7)\vec{\imath} + (m+2)\vec{\jmath} + 5\vec{k}$. Calcular m para que $|\vec{v}| = \sqrt{38}$.

20. Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(0,1,2), B(-1,0,-1)$ e $C(2,-1,0)$.

21. Seja o triângulo de vértices $A(-1,-2,4), B(-4,-2,0)$ e $C(3,-2,1)$. Determine o ângulo interno ao vértice B.

22. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

23. Sabendo que o ângulo entre os vectores $\vec{u} = (2,1,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,m+2)$ é $\frac{\pi}{3}$, determinar *m*.

24. Dados os vectores $\vec{a} = (2,1,\alpha), \vec{b} = (\alpha+2,-5,2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vector $\vec{a}+\vec{b}$ seja ortogonal ao vector $\vec{c}-\vec{a}$.

25. Provar que os pontos $A(5,1,5), B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ são vértices de um triângulo rectângulo.

26. Calcule $|\vec{a} \times \vec{b}|$ se:

    a) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$; b) $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ e $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12.$

27. Ache as coordenadas do vector $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$, se $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{b} = (1,2,-1)$.

28. Calcule $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|$ e $|(\vec{a} - 3\vec{b}) \times (\overrightarrow{3a} - \vec{b})|$, sabendo que $|\vec{a}| = 1, |\vec{a}| = 2$ e $(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

29. Calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$, se $|\vec{a}| = 3, |\vec{a}| = 26$ e $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72.$

30. Sejam $\vec{a} = (3,-1,-2)$ e $\vec{a} = (1,2,-1)$. Determine $\vec{a} \times \vec{b}$.

31. Sejam $\vec{a} = (2,-3,1), \vec{b} = (-3,1,2)$ e $\vec{c} = (-1,-2,2)$. Determine

    a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ b) $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

32. Sabendo que $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}$ e 45º é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcule $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

33. Dados os vectores $\vec{u} = (2,-1,1), \vec{v} = (1,-1,0)$ e $\vec{w} = (-1,2,2)$, calcular:

    a) $\vec{w} \times \vec{v}$ b) $(2\vec{u}) \times (3\vec{v})$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

34. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vectores $\vec{u} = (3,1,2)$ e $\vec{v} = (4,-1,0)$.

35. Calcular a área do triângulo de vértices $A(-1,0,2), B(-4,1,1)$ e $C(0,1,3)$.

36. Sabendo que $\vec{c}$ é perpendicular aos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30°, |\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 3$ e $|\vec{a}| = 3.$

    Calcule $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

37. Sabe-se que $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são perpendiculares dois a dois e formam um triedro direito,

    $|\vec{a}| = 4, , |\vec{b}| = 2$ e , $|\vec{c}| = 3$. Calcule $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

38. Sejam $\vec{a} = (1,-1,3), \vec{b} = (-2,2,1)$ e $\vec{c} = (3,-2,5)$. Calcule:

    a) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ b) $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ c) $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$

39. Sejam $\vec{a} = (1,2,2), \vec{b} = (0,0,-3)$ e $\vec{c} = (-2,4,-3)$. Calcule:

a) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ b) $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ c) $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$

40. Calcule o volume do paralolopípedo cujos lados são os vectores:

$$\vec{a} = (1,-3,1), \vec{b} = (2,1,-3) \text{ e } \vec{c} = (1,2,1).$$

41. Calcule o volume do tetraedro ABCD onde:

a) $A(2,3,1), B(4,1,-2)\ e\ C(6,3,7)$ e $D(-5,-4,8)$;

b) $A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1)$ e $D(4,1,1)$.

42. Calcule o volume da pirâmide triangular que tem vértices:

$$A(0,0,1), B(2,3,5), C(6,2,3) \text{ e } D(3,7,2).$$

43. Determine o(s) valor(es) de x para que os pontos $A(5,x,2), B(3,1,-1), C(9,4,-4)$ e $D(1,5,0)$ sejam coplanares.

III. Espaços Vectoriais

44. Considere os vectores $u = (-4, 10, 5)$; $v_1 = (1, 1, -2)$; $v_2 = (2, 0, 3)$; $v_3 = (-1,\ 2,\ 3)$
   a) Escrever se possível, o vector u como combinação linear dos vectores v_1, v_2 e v_3.
   b) Escrever se possível, o vector u como combinação linear dos vectores v_2 e v_3.
45. Verifica a dependência linear dos vectores:
   a) $v_1 = (1, 1, -2)$; $v_2 = (2, 0, 3)$; $v_3 = (-1,\ 2,\ 3)$
   b) $v_1 = (1, 1, -2)$; $v_2 = (2, 0, 3)$; $v_3 = (8,\ 2,\ 5)$
   c) $u = (1, 2, 3, 4)$; $v = (4, 3, 2, 1)$
   d) $u = -t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 16$, $v = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 8$
   e) $u = t^3 + 3t + 4$ $v = t^3 + 4t + 3$
   f) $u = (1, 3, -1, 4)$; $v = (3, 8, -5, 7)$; $w = (2, 9, 4, 23)$
   g) $u = t^3 - 5t^2 - 2t + 3$; $v = t^3 - 4t^2 - 3t + 4$, $w = 2t^3 - 7t^2 - 7t + 9$
46. Mostre que os conjuntos abaixo são bases dos respectivos espaços.
   a) $B = \{(1, 2);\ (-3,\ 4)\}$ em $\mathbb{R}^2$ b) $B = \{(1, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$
47. Indique base e a dimensão do subespaço formado por:
   a) $(1, 4, -1, 3); (2, 1, -3, -1); (0, 2, 1, -5)$
   b) $(1, -4, -2, 1)$; $(1, -3, -1, 2); (3, -8, -2, 7)$
   c) $u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1$; $v = t^3 + 3t^2 - t + 4$; $w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7$